Rund um das Vierfarbenproblem

Eine Projektarbeit des Leibniz-Kurses

Alexander Bodenhage
Lotte Frost
Matvei Galaktionov
Julius Göcke
Arsenii Kovler
Simon Sandmann

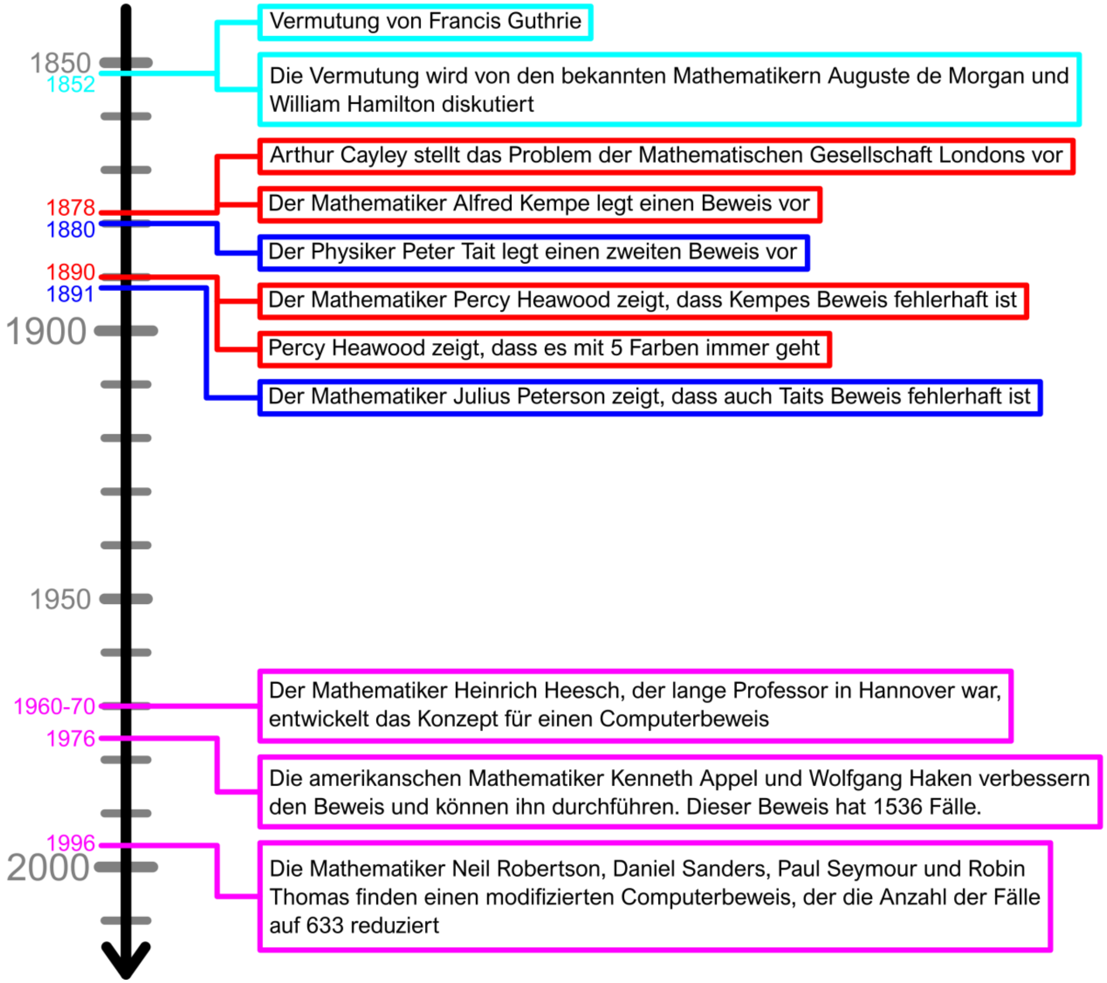
Was wir getan haben und hier vorstellen wollen

- Das *Vierfarbenproblem* ist die Frage, ob man die Länder einer Landkarte mit vier Farben so färben kann, dass nie zwei aneinandergrenzende Länder die gleiche Farbe tragen.
- Wir haben uns mit dem Vierfarbenproblem, seiner Geschichte, der mathematischen Lösung und der Bedeutung für die Mathematik auseinandergesetzt.
- Wir haben uns mit einigen wichtigen Beweisen und den Fehlern, die dabei gemacht wurden, beschäftigt

Zeittafel

Francis Guthrie (1831-1899)

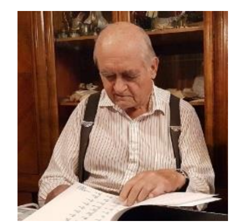
Alfred Kempe (1849-1922)



Percy Heawood (1861-1955)

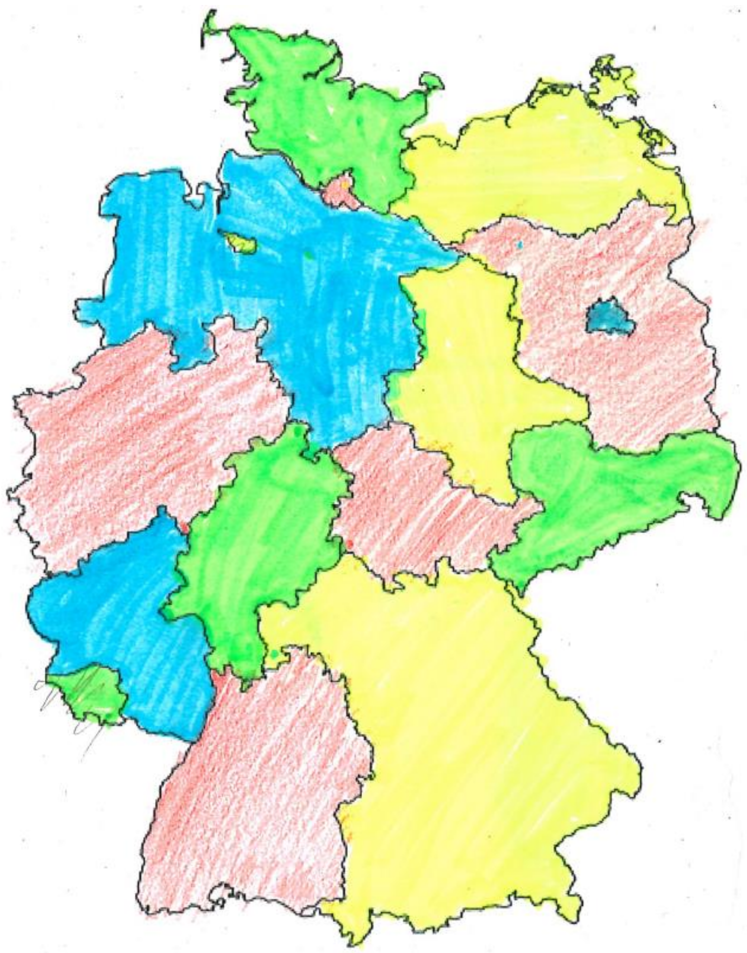
Heinrich Heesch (1906-1995)

Kenneth Appel (1932-2013)

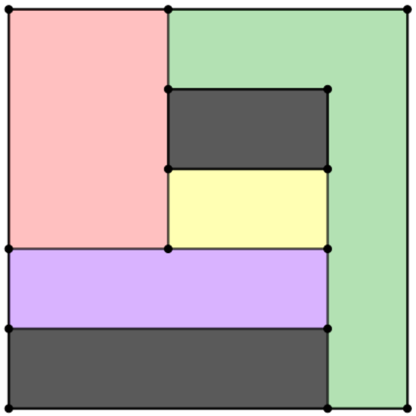


Wolfgang Haken (1928-2022)

Ein Beispiel



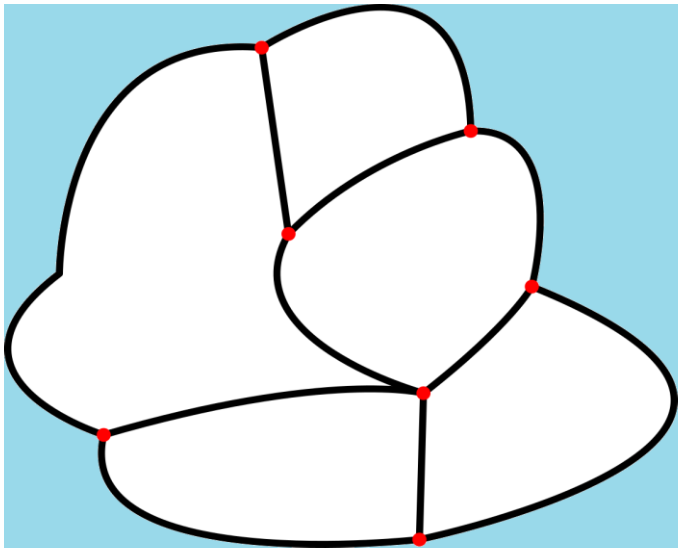
- Hier haben wir eine Karte gefärbt, um uns ins Thema hineinzudenken.
- Fast wäre es auch mit drei Farben gegangen.
- Allerdings funktioniert das mit Thüringen nicht.
- Berlin ist eine Enklave, Bremerhaven eine Exklave von Bremen.
- Exklaven sind nicht erlaubt.



Hier sind
vier Farben
Erforderlich.

Vereinfachter Landkartenbegriff

- Wir verwenden einen vereinfachten Landkartenbegriff.
- Eine *Landkarte* besteht aus *Grenzsteinen* und *Grenzlinien*, welche eine Fläche in *Länder* unterteilen. Es gelten bestimmte Regeln:



(1) Die Grenzlinien dürfen sich nicht überschneiden.
(2) Eine Grenzlinie verbindet zwei verschiedene Grenzsteine.
(3) Zwischen zwei Grenzsteinen gibt es höchstens eine Grenzlinie.
(4) Von jedem Grenzstein gehen mindestens drei Grenzlinien aus.
(5) Je zwei Grenzsteine sind durch Grenzlinien miteinander verbunden.
(6) Jede Grenzlinie gehört zu einem *Kreis* (s. Bild).
(7) Es gibt mindestens einen Grenzstein.

Das „Meer“ ist auch ein Land.
In der Preisarbeit haben wir den Begriff Landkarte genauer betrachtet.

Die Eulersche Polyederformel

Wir stellen nun die *Eulersche Polyederfor*mel vor. Der Mathematiker Leonard Euler hat sie für konvexe Polyeder entdeckt. Sie gilt auch für Landkarten (*Eulerformel für Landkarten*).

Polyeder sind dreidimensionale Körper, die ausschließlich von ebenen Flächen begrenzt werden.

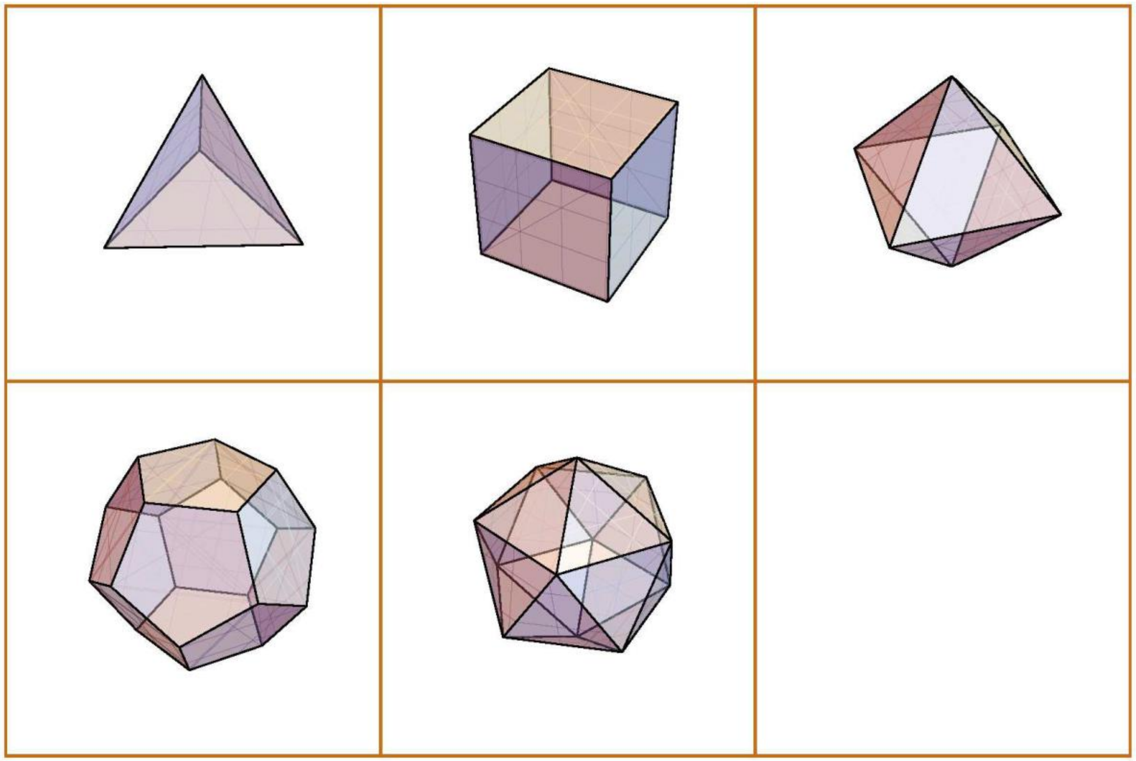
Leonard Euler (1707-1783)

Konvexer Polyeder

Nicht-konvexer Polyeder

Platonische Körper

Die Platonischen Körper sind konvexe Polyeder. Die Begrenzungsflächen sind kongruente regelmäßige Polyeder.



Tetraeder
Kubus (Hexaeder, Würfel)
Oktaeder
Dodekaeder
Ikosaeder

Eulersche Polyederformel für Platonische Körper

Zählt man die Zahl der Ecken (*e*), die Zahl der Kanten (*k*)
und die Zahl der Flächen (*f*), so ergibt sich:

	Tetraeder	**Kubus**	**Oktaeder**	**Dodekaeder**	**Ikosaeder**
e	4	8	6	20	12
k	6	12	12	30	30
f	4	6	8	12	20
e-k+f	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*

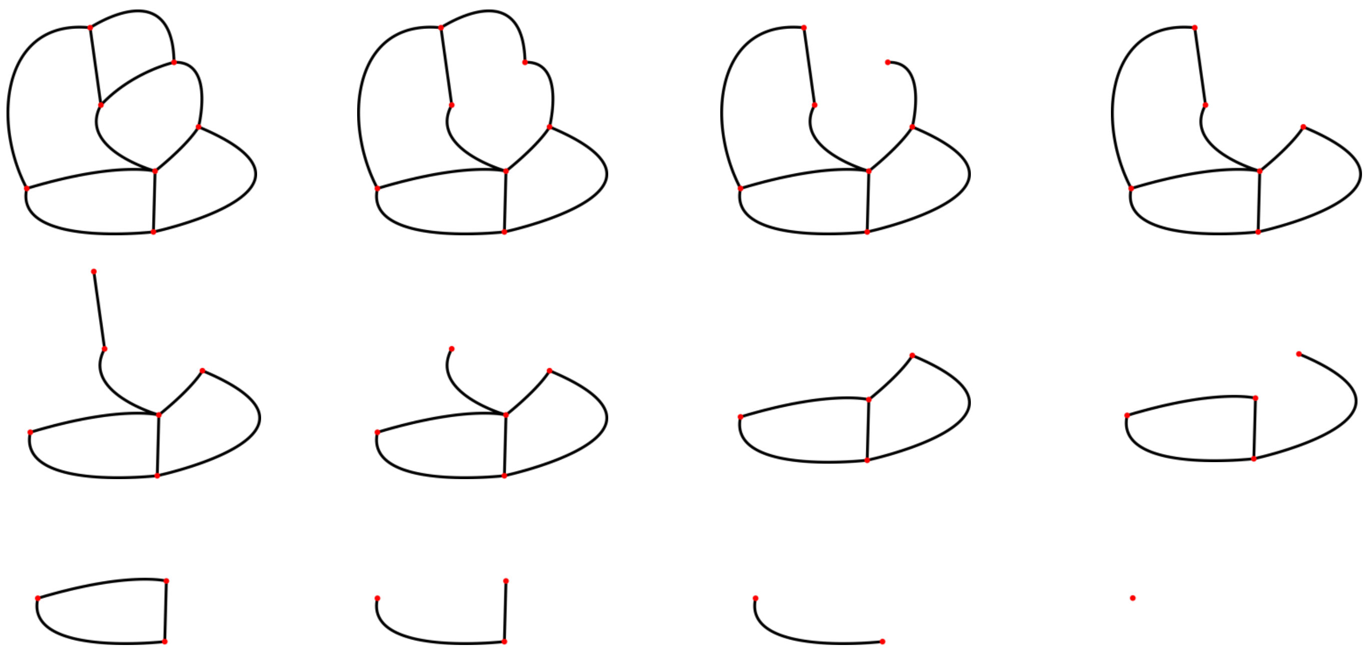
Stets gilt:

$$e - k + f = 2.$$

Leonard Euler hat erkannt, dass diese Formel für alle konvexen Polyeder gilt. Deshalb heißt sie *Eulersche Polyederformel.*

Beweis der Eulerformel für Landkarten

Zuerst zählen wir nach, ob die Eulerformel für diese Landkarte gilt:
$e = 7, k = 11, f = 6$, also $e - k + f = 7 - 11 + 6 = 2$.



Wir entfernen Kreisgrenzlinien (f-1, k-1) und Grenzsteine mit einer Grenzlinie (e-1, k-1). Am Ende ist nur noch ein Grenzstein übrig, also gilt:
$e - k + f = 1 - 0 + 1 = 2$.

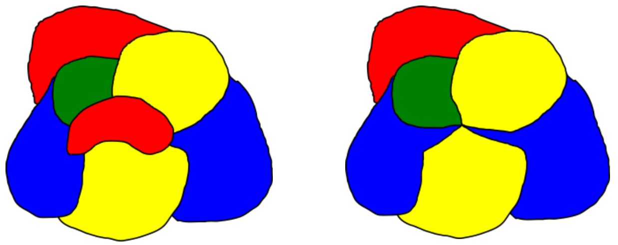
Fünf-Nachbar-Satz

- Satz: In jeder Landkarte gibt es mindestens ein Land, dass an höchstens 5 andere grenzt
- Beweis:
- **1:** $2k \geq 3e$
- **2:** $3e - 2k \leq 0$
- **2:** $2k \geq 3f$
- **4:** $6e - 4k = 6e - 6k + 2k \geq 6e - 6k + 6f = 12$
- **5:** $3e - 2k \geq 6$
- Widerspruch zu 2

Kempes Beweis

Die vollständige Induktion

- Man nimmt eine gefärbte Karte
- Aus dieser Karte entfernt man das Land, dass an höchstens 5 andere grenzt:



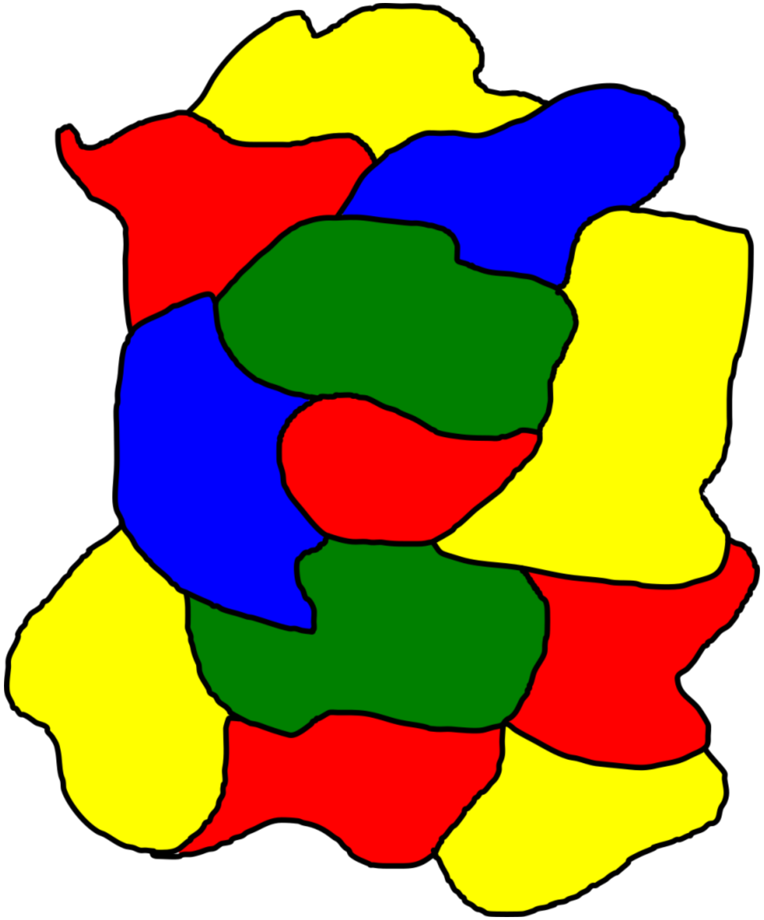
- Jetzt nimmt man an, dass die entstandene Karte mit 4 Farben färbbar ist
- Jetzt kann man das Land wieder hinzufügen und die es, wie im folgenden bewiesen, in einer der 4 Farben färben
- Deshalb kann man eine Karte immer färben, wenn die Karte ohne das Land färben kann
- Das kann man fortführen, bis man bei einer Karte mit nur 4 Ländern angekommen ist

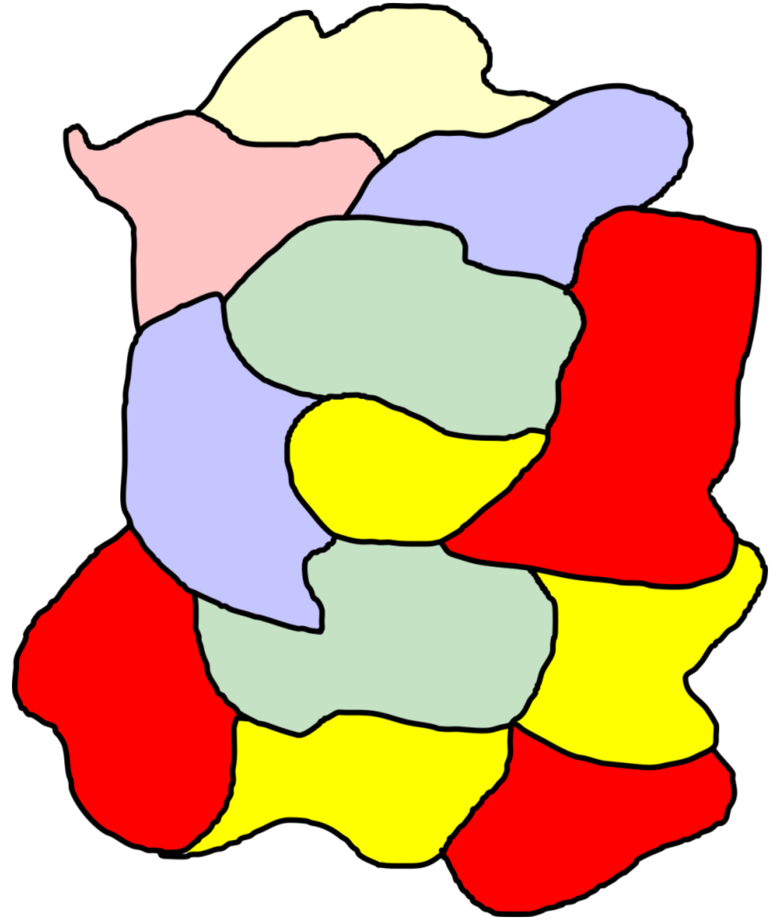
Warum man das hinzugefügte Land (X) immer in einer der Farben färben kann

- Wenn X an 3 oder weniger Länder grenzt kann man es färben
- Wenn die Nachbarn von X in 3 oder weniger Farben gefärbt sind, ist es auch immer färbbar

- Danach gibt es noch 2 Fälle:
  - X ist von 4 Ländern umgeben, die in 4 Farben gefärbt sind
  - X ist von 5 Ländern umgeben, die in 4 Farben gefärbt sind

Der Begriff der Region

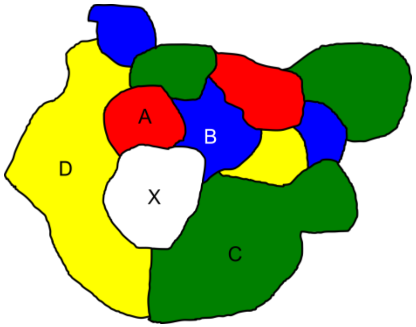




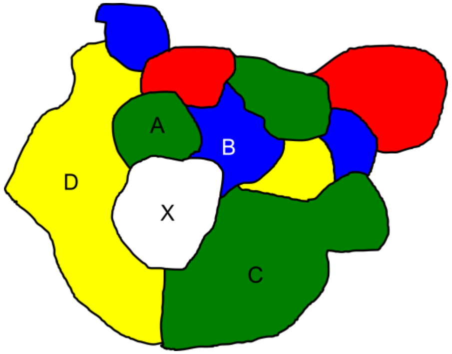
Fall 1

Fall 1.1

Zwei Länder um X gehören zu unterschiedlichen Regionen

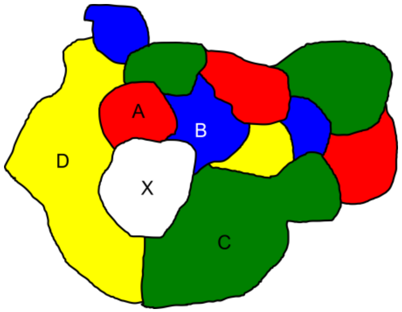


Man kann die Farben dieser Region vertauschen

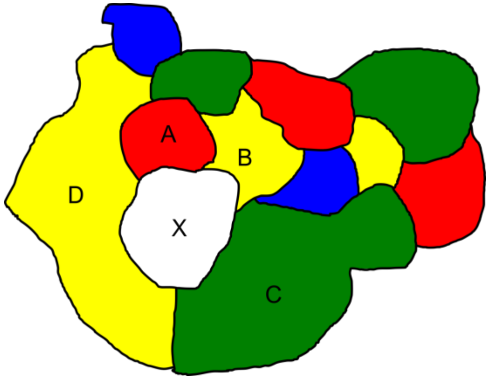


Fall 1.2

Zwei Länder um X gehören zur selben Region



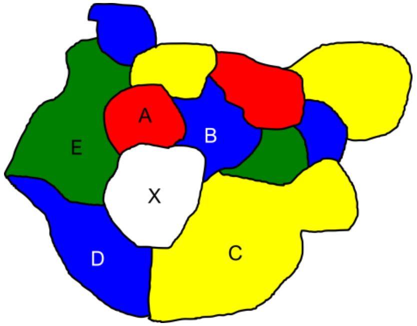
Die anderen beiden gehören nicht zur selben Region



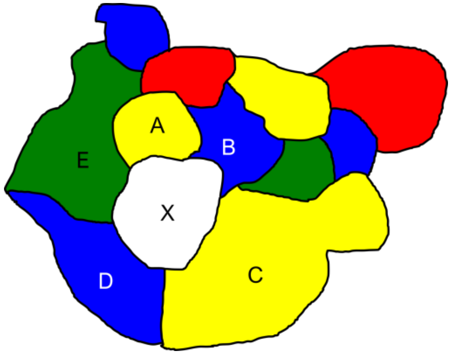
Fall 2

Fall 2.1

Zwei Länder um X gehören zu unterschiedlichen Regionen

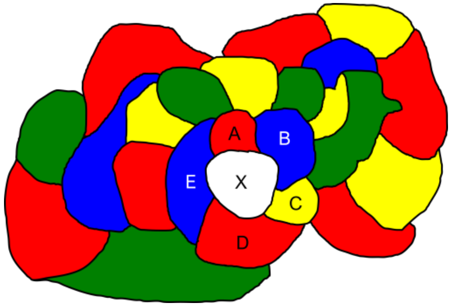


Man kann die Farben dieser Region vertauschen

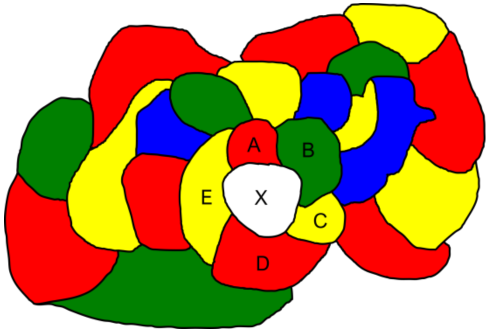


Fall 2.2

Von 4 Ländern sind jeweils 2 in der selben Region

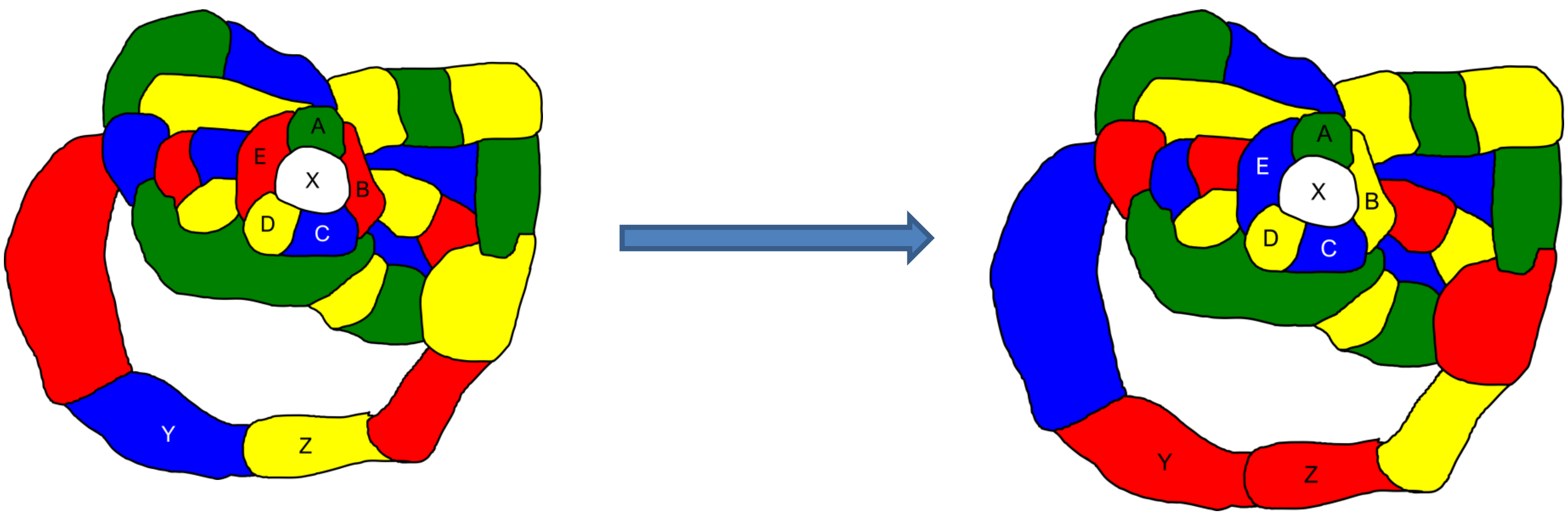


Zwei Regionen werden eingeschlossen



Der Fehler

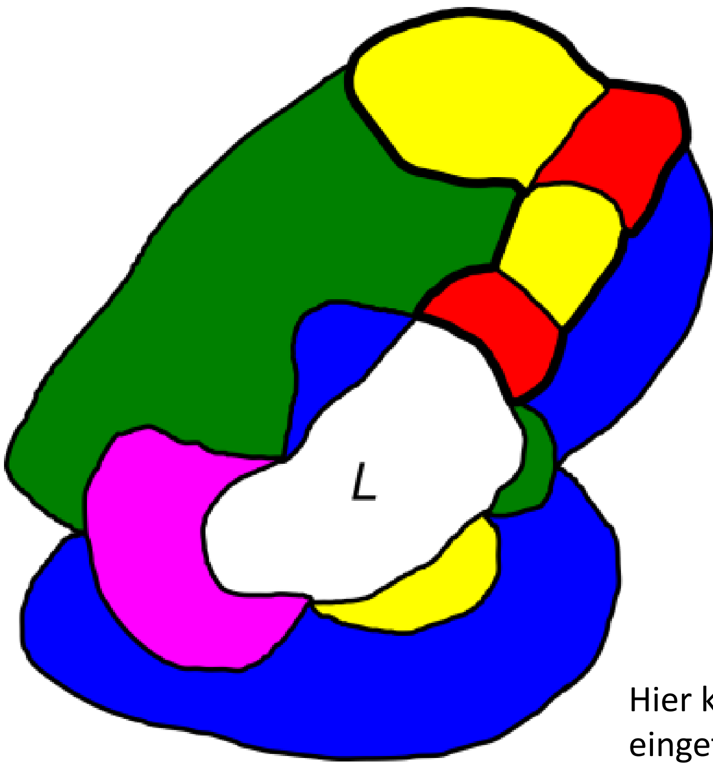
Kempe übersah, dass die umgefärbte Region die trennende Region kreuzen kann



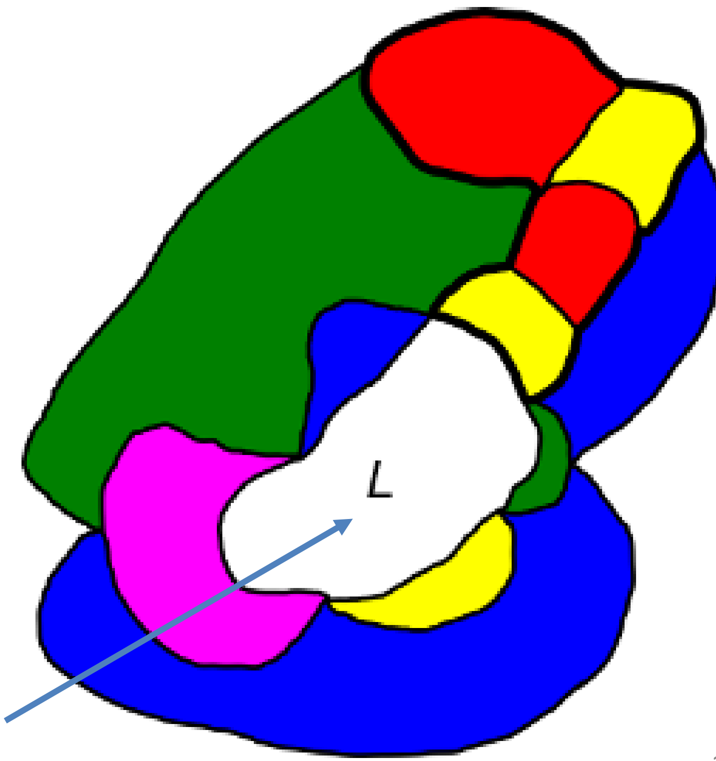
Der Fünffarbensatz

Fünffarbensatz: Jede Landkarte nach Definition kann mit 5 Farben zulässig gefärbt werden.

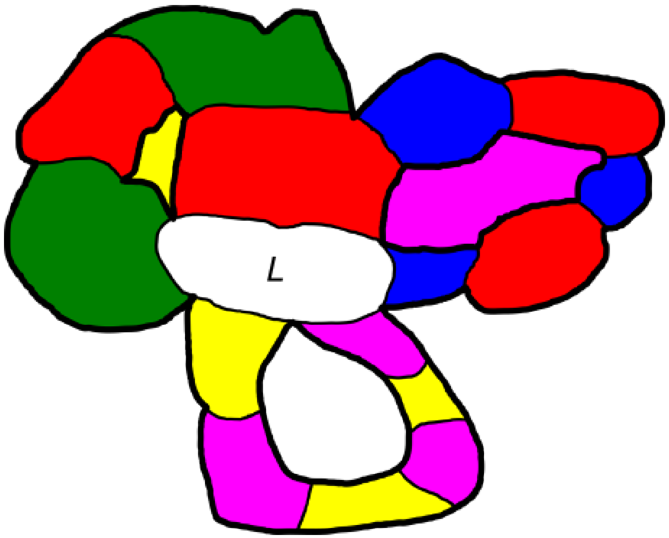
Fall 1: Ein Nachbar von *L* ist allein in einer Region

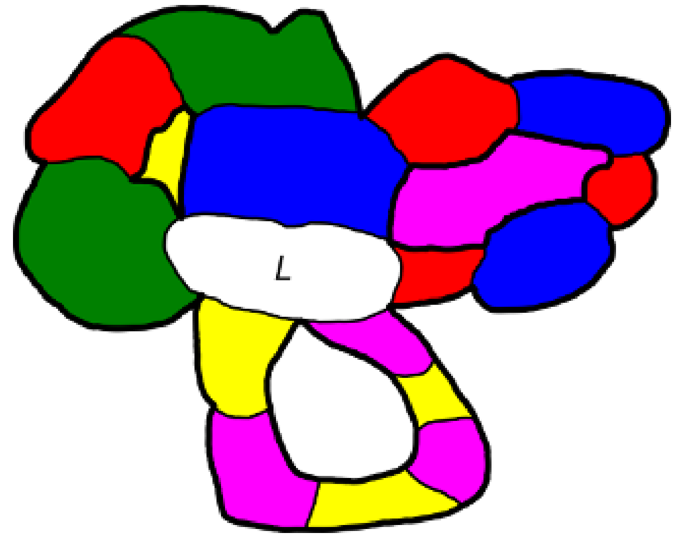


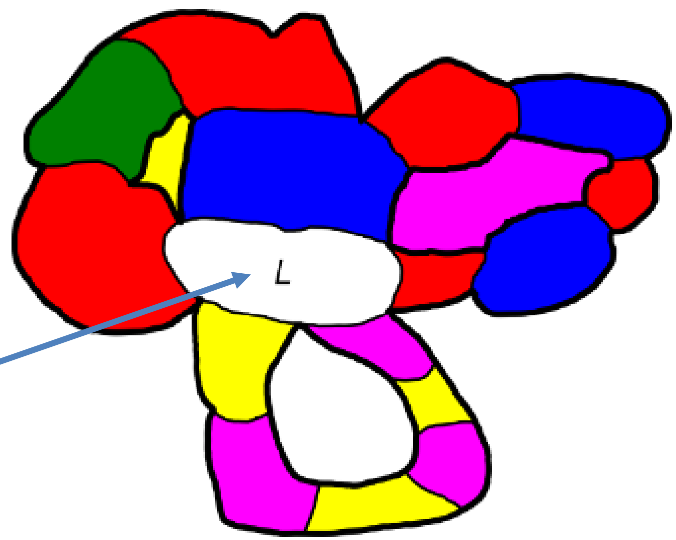
Hier kann *L* mit Rot eingefärbt werden.



Fall 2: Die Nachbarn von *L* sind paarweise in Regionen verteilt

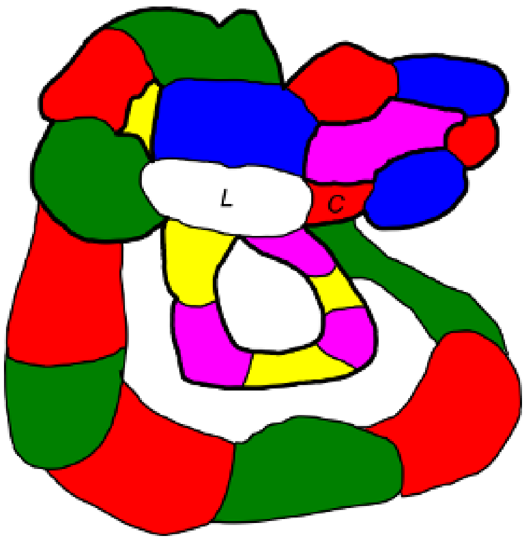


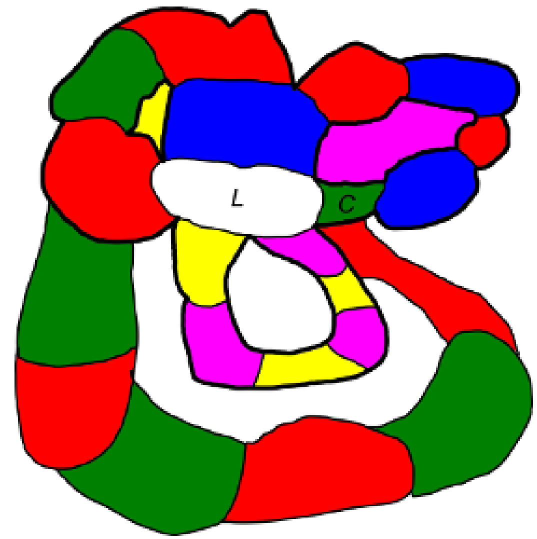




Hier kann *L* mit Grün eingefärbt werden.

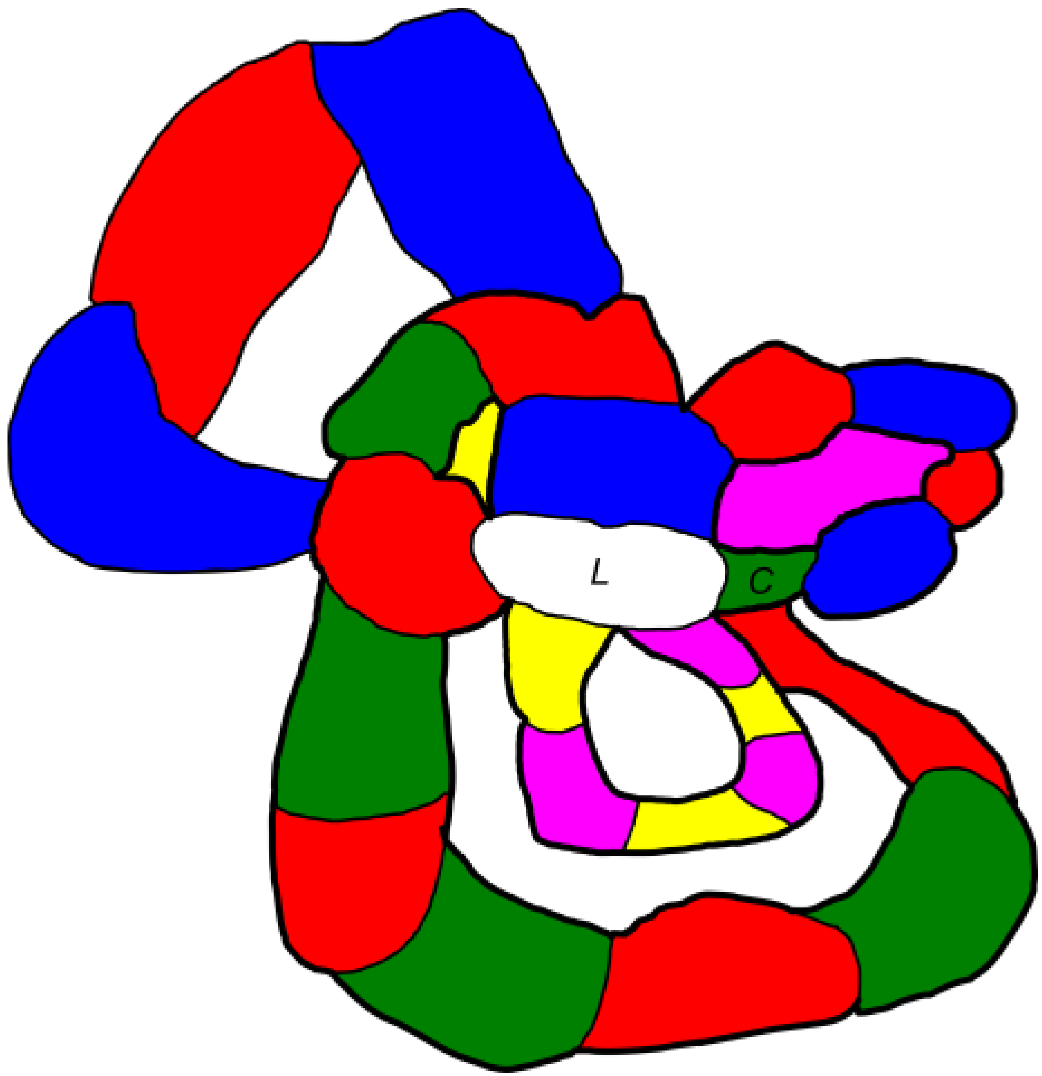
Fall 2.1: Möglichkeit wo Fall 2 nicht funktioniert





Hier kann *L* mit Blau eingefärbt werden.

Fall 2.2: Möglichkeit wo Fall 2.1 nicht funktioniert



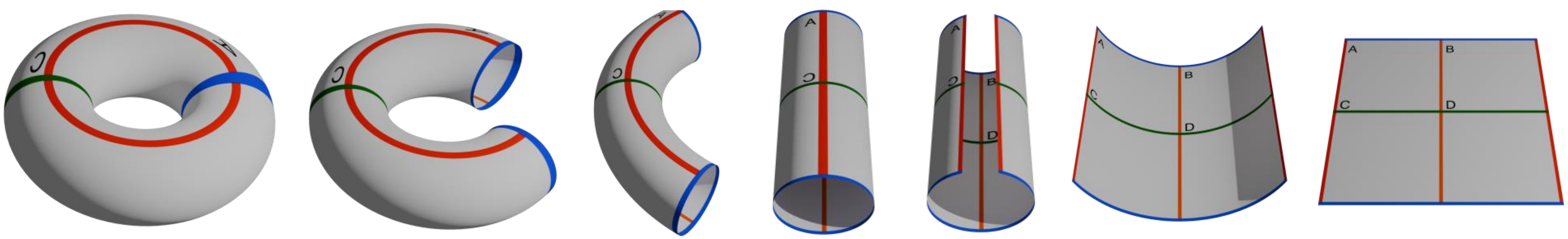
Wie viele Farben benötigt man auf dem Torus?

Was ist ein Torus?

Eine Fläche, die aussieht wie die Oberfläche eines Schwimm-reifens, Fahrradschlauchs oder eines Donuts, nennt man auch einen Torus.

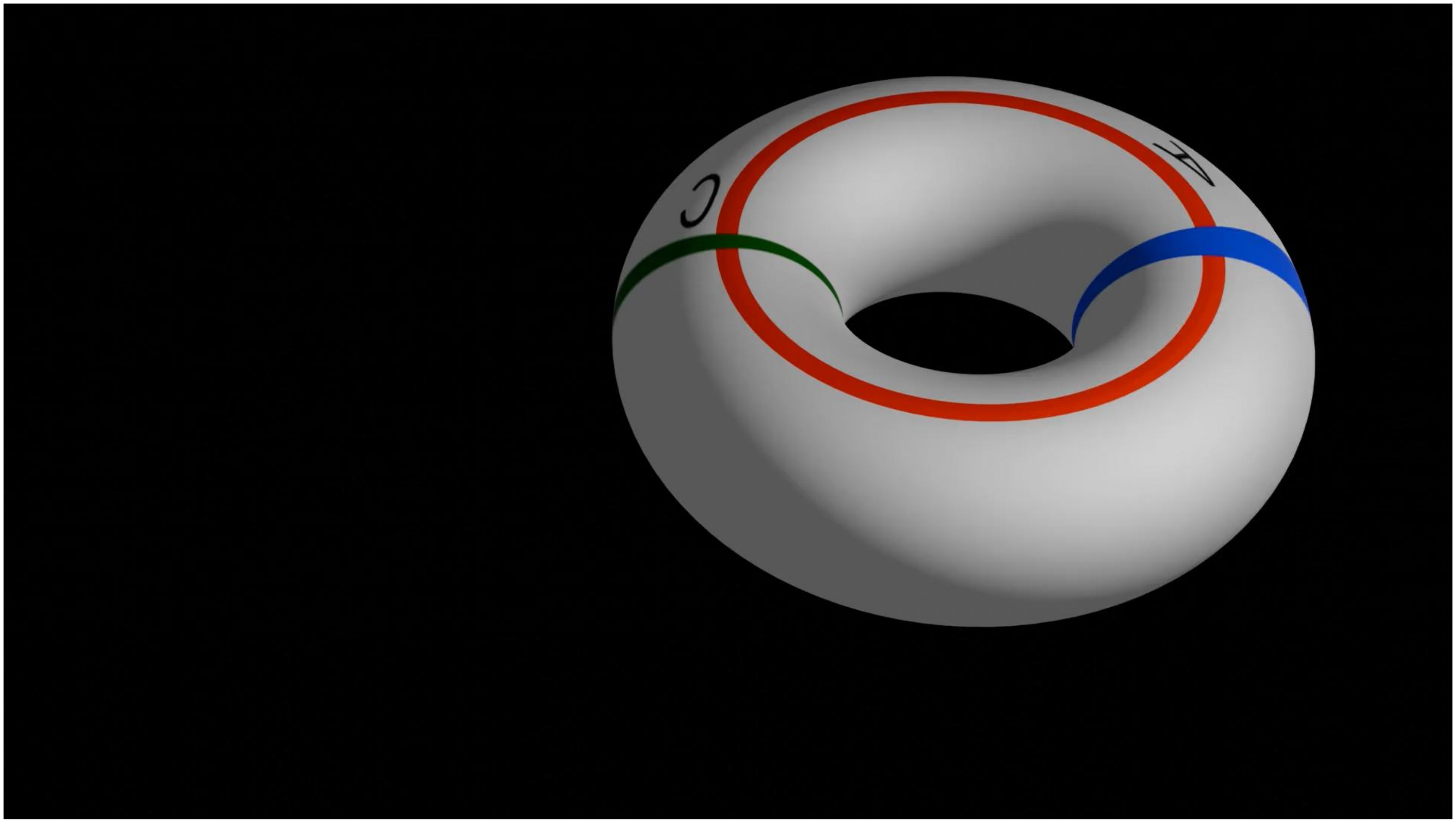
Wie kann man sich auf dem Torus orientieren?

Mithilfe der eingezeichneten Kreise kann man sich auf dem Torus orientieren. Sie bilden eine Art Koordinatensystem. Das sieht man, wenn man den Torus aufschneidet und aufklappt.



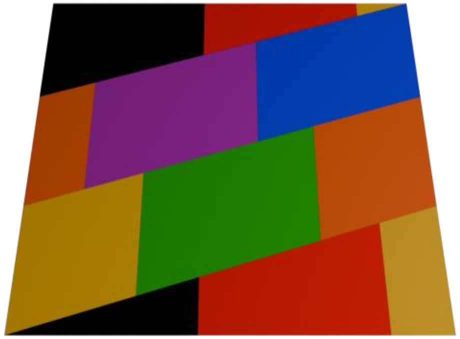
Man erhält ein Rechteck. Der rote Kreis ist zur rechten und linken Seite des Rechtecks geworden, der blaue Kreis zur oberen und unteren Seite des Rechtecks. Eine orangene Linie, die sich auf der Unterseite des Torus befunden hat, wird sichtbar.

Aufschneiden und Aufklappen



Landkarte auf dem Torus

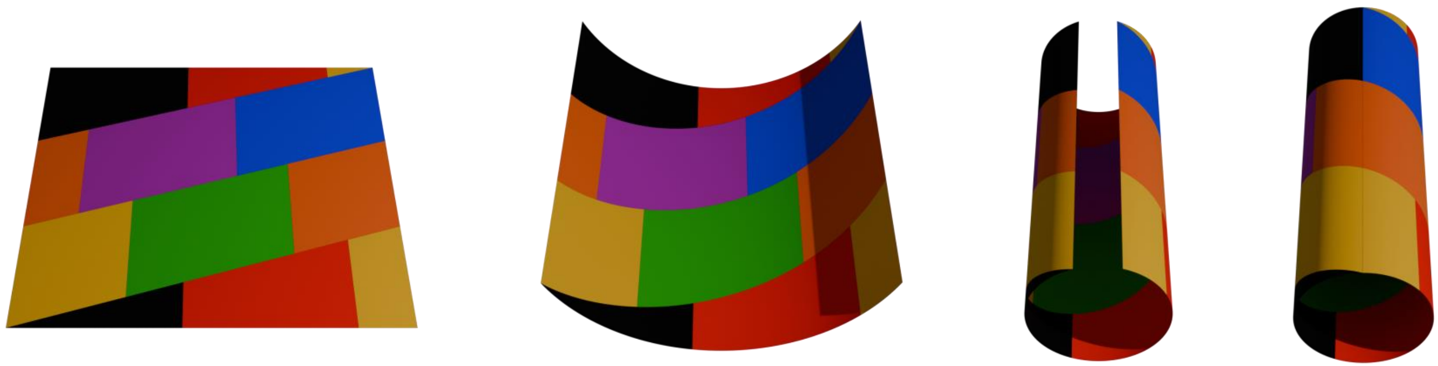
Wir beginnen nun umgekehrt mit einer Landkarte auf dem Rechteck.



Auf dieser Landkarte gibt es sieben Länder in verschiedenen Farben. Einige Länder scheinen aus mehreren Stücken zu bestehen. Was passiert, wenn wir den Vorgang rückgängig machen und das Rechteck zu einem Zylinder und dann zu einem Torus zusammenkleben?

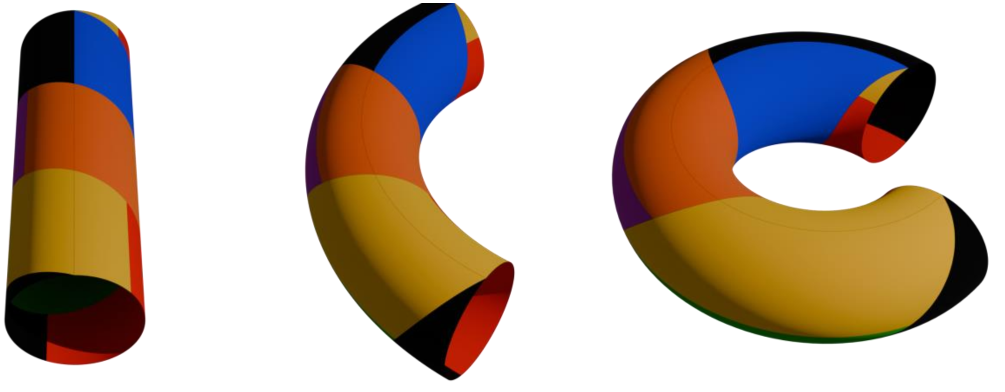
Aufrollen und verkleben

Die orangenen Stücke passen dort, wo wir die Rechteckseiten zu einem Zylinder zusammenkleben, genau zusammen, ebenso die gelben Stücke. Sie bilden zusammen ein Land. Das schwarze und das blaue Stück bilden kein Land. Zufällig ist genau dort eine Grenzlinie.



Die Enden verkleben

Die verbleibenden schwarzen, roten und gelben Stücke finden aber dann zu je einem Land zusammen, wenn der Zylinder zum Torus zusammengeklebt wird:



Wir erhalten eine Landkarte auf dem Torus, die aus sieben Ländern besteht. Sollte man diese nicht mit vier Farben zulässig färben können?

Wie viele Farben?

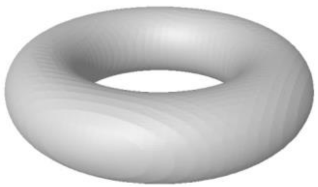
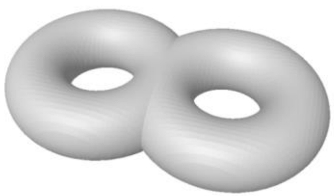
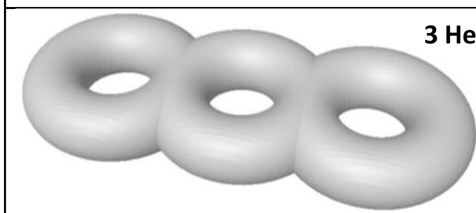
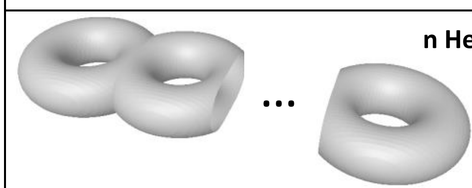
Wenn man genau hinschaut, sieht man: Jedes Land hat zu jedem anderen eine Grenzlinie. Man braucht also mindestens sieben Farben!

- Für den Beweis haben wir die Eulerformel $e - k + f = 2$ benutzt. Gilt diese vielleicht auch nicht?
- Wir zählen $e = 14$, $k = 21$, $f = 7$. Es gilt:

$$e - k + f = 0.$$

- Tatsächlich gilt auf dem Torus diese Eulerformel.
- Die Zahl $e - k + f$ ist für den Torus eine andere als für die Ebene. Der jeweilige Wert ist charakteristisch jeweilige Gestalt. Deshalb spricht man von der
  - *Euler-Charakteristik* der Ebene, nämlich 2,
  - und der *Euler-Charakteristik* des Torus, nämlich 0.

Henkelflächen

Henkelfläche	Euler-Charakteristik	Anzahl benötigter Farben, nach Heawood-Formel
 **1 Henkel**	0	7
 **2 Henkel**	-2	8
 **3 Henkel**	-4	9
…		
 **n Henkel**	$2-2n$	$\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48n}}{2}\right\rfloor$

Heute unterscheidet man Flächen wie den Torus nach der Zahl der *Henkel*.

Die Tabelle zeigt die Euler-Charakteristik und die Anzahl der Farben, die für eine zulässige Färbung erforderlich sind.

Dies sind grundlegende Ergebnisse der algebraischen Topologie, die so ihren Anfang genommen hat.

Danke für die Aufmerksamkeit!